Promocijas darbs

Kombinatorisko karšu teorija
un
tās lietošana grafu topoloģiskos aprēķinos

Dainis Zeps

Sākot no 1978. gada Grinberga vadībā ir veikti grafu teorētiski pētījumi gan ar patstāvīgu nozīmi gan orientējoties uz pielietojumiem grafu algoritmu konstruēšanā.

Risinot integrālshēmu projektēšanas uzdevumus kā arī teorētiskos algoritmiskos uzdevumus par grafa sadalīšanu 3-sakarības komponentēs un grafa planarizāciju, galvenā uzmanība vēršās uz grafu topoloģiskiem uzdevumiem.

Idejām attīstoties, nonācām pie **grafu rotāciju shēmām**[1], kas ir šī darba galvenais temats.

---

[1] Šodien šī disciplīna saucas kombinatorisko karšu teorija.

Izejot no praktiska uzdevuma par neplanāra grafa ieguldīšanu plaknē, realizējot krustojošās šķautnes ar jaunām virsotnēm un šķautnēm, nonācām pie uzdevuma dinamiski uzturēt grafu sadalītu 3-sakarības komponentēs.

Uzdevums grafu-teorētiskā un algoritmiskā plāksnē tika atrisināts 1984. gadā un tika publicēts kā algoritma apraksts:
Д. А. Зепс. *О динамическом разбиении графа на 3-связные компоненты*, Республиканский фонд алгоритмов и программ, Инв. Н. ИА0003, Рига, 1984, 16 стр.

Grafa dinamiska uzturēšanas 3-sakarības komponentēs [uzdevuma formulējums]:
grafs uzdots kā šķautņu kopa, sākotnēji tukšs, kur tiek pievienotas jaunas šķautnes un katrā solī grafs ir sadalīts 3-sakarības komponentēs.

Sekas darbam

Д. А. Зепс. *О динамическом разбиении графа на 3-связные компоненты*, Республиканский фонд алгоритмов и программ, Инв. Н. ИА0003, Рига, 1984, 16 стр.:

1) šeit atrasto algoritmu bija grūti saitīt ar Tutte izstrādāto 3-sakarības teoriju
[W.T.Tutte. *3-connectivity*, in *Graph theory*, chapter IV, 1984].

Tika izstrādāta jauna teorija:

D. A. Zeps. *Another Theory of Triconnectivity*. Prague, KAM MFF UK, N 90-168, Prague, 1992., 6pp.

2) Realizējot programu, bez 3-sakarības komponentēm tika uzturēti arī to duālie grafi.

Pacēlās jautājums, kas ir neplanāra grafa duālais grafs.

Tika atklāta vienkāršākā grafa rotāciju shēma [1984. gadā], kura jau bija zināma Hefteram pagājušajā gadsimtā:

L. Hefter, *Über metacyklische Gruppen und Nachbarconfigurationen*, Math. Ann. 50, 261- 268, 1898.

Nākamās grafu rotācijas shēmas tika iegūtas pētot grafu dualitāti dziļāk:

parastā [Whitney] dualitātes shēmā atbilstībā

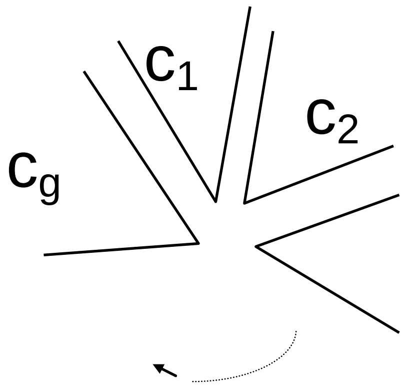
šķautne $\longrightarrow$ šķautne
virsotne $\longrightarrow$ skaldne

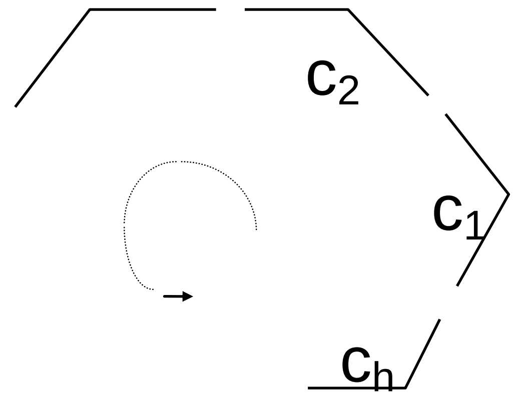
ieved jaunu objektu - grafa realizācijā uz virsmas **blakus izvietoto šķautņu pāri** jeb **stūri**:

stūris $\longrightarrow$ stūris
stūris $\longrightarrow$ stūris.

D. A. Zeps. *Graphs with Rotations as Selfdual Facet System*, unpublished, 1993, 6pp.

Grafu uz topoloģiskas virsmas apraksta divas rotācijas:





ar stūriem attēlota virsotnes rotācija $P = (c_1, \ldots, c_g)$ ...

ar stūriem attēlota skaldnes rotācija $Q = (c_1, \ldots, c_h)$ ...

Lai P un Q ir atbilstoši grafa visu virsotņu un skaldņu kopējās rotācijas.

Ja stūru konfigurācija veido grafu, tad reizinājums $P^{-1} * Q$ [= p] ir sapārojums. p sauc par škautņu rotāciju. No trīs grafu determinējošām rotācijām vienu var izrēķināt.

Izstrādāta kombinatorisko karšu teorija:

D. Zeps. *Graphs as rotations*, KAM Series, 96-327, Prague,1996, 9pp.

Atbilstības princips: permutācijas $\longrightarrow$ kartes:
Fiksējot šķautņu rotāciju p = p_0 visai karšu klasei, kas ir slēgta pret reizināšanu, iegūst klasi, kas reprezentē visas slēgtās klases, bet karti vienas klases robežās nosaka viena pati permutācija.

Atbilstības principa vispārinājums: jebkurai īpašībai, kas pierādāma permutācijām, ir spēkā arī kombinatoriskajām kartēm.

Kombinatorisko karšu teorijā ir pierādīta virkne teorēmu, starp kurām:

[9] Karšu apakšklase K_p, kurai sakrīt abas šķautņu rotācijas, veido apakšgrupu visā karšu grupā un tā ir izomorfa $S_m * S_2^m$, kur S_{2m} - simetriskā grupa izomorfa vienai karšu klasei.

[14] Citas klases ar fiksētu šķautņu rotāciju r ir klases K_p kreisās blakusklases.

[14] Katru karti (P,Q) var izteikt kā reizinājumu $m_{(P,Q)} * a_{(P,Q)}$, kur $m_{(P,Q)}$ ir šīs kartes kombinatoriskais mezgls un $a_{(P,Q)}$ - karte, kas pieder klasei K_p.

Parciālās kartes un to ģeometriskā interpretācija kā grafisko karšu apakškartes [6. nodaļa].

D. Zeps. *Graphs with rotations: partial maps*, KAM Series, 97-365, 1996, 12pp.

Parciālās kartes (p, q) attēls $(P_t, Q * R^{-1})$ ir grafiska karte, kuras viena no apakškartēm ir šī parciālkarte.

Parciālkartes attēls izsakāms ar izteiksmi $(uP, QuPQ^{-1}u)$, kur u ir bijekcija starp parciālkartes stūriem un jaunievestiem stūriem tās attēlā.

Parciālkarte [tāpat kā tās speciālgadījums - kombinatoriskā [grafiskā] karte] definē viennozīmīgi kombinatorisko virsmu. t.i. to virsmu ar minimālo kārtu, uz kuras šo karti var uzzīmēt.

Problēma: vai grafiska karte satur netriviālas apakškartes, kas savukārt ir grafiskas. Atbilde ir apstiprinoša - teorēma 54.
Ciklu pārklājumu teorija. [8. nodaļa]
D. Zeps. *The use of the combinatorial map theory in graph-topological computations*, KAM Series, 97-364, Prague, 1997, 8pp.

Definē divu permutāciju P, Q izvēles operatoru $\triangledown$ un ieved nedeterministisku operāciju

$$c^{P \triangledown Q} = c^{P} \text{ vai } c^{Q}$$

un iegūtās permutācijas sauc par ciklu pārklājumiem, kur orbītas šajos pārklājumos sauc par cikliem. Ciklu pārklājums ir definēts jebkurai parciālkartei (P, Q).

Cikliem, kas ir definēti kombinatoriski, atbilst cikli grafiem uz virsmām.

Ciklu pārklājums sadala kartes šķautnes àetrās grupās:

1) ārējās - cikla un šķēluma škautnēs;
2) iekšējās - krosa un rekurences šķautnēs.

Grafiski cikla šķautnes veido ciklus, un šķēluma škautnes veido griezumus.

Ciklu pārklājumi bez iekšējām šķautnēm nokrāso kartes elementus divās krāsās tā, ka katra šķautne dabū divas krāsas visās šķautņu rotācijās. Šos pārklājumus sauc par krāsojamiem, un tos var viegli izrēķināt ar zigzag caurskati - to, kas definē kartes kombinatorisko mezglu.

Pierādītas teorēmas:

[54] Ja C_{cycle} ir tie kartes (P,Q) elementi, kas pieder cikliskajām šķautnēm no ciklu pārklājuma z, tad ierobežojums $(P, Q)_{cycle}$ uz kopas C_{cycle} ir grafiska karte.

[55] Grafiskās kartes (P, Q) ar ciklu pārklājumu z cikli ir arī parciālkartes (z, Q) cikli.

[56] $g_{(P,Q)} > g_{(P,z)} + g_{(Q,z)}$.

Lai $P' = P * (P_{cycle})^{-1}$. Parciālkarte (P',Q) ir grafiskā karte (P,Q) uz virsmas, kur tā pārgriezta pa ciklu pārklājuma cikliem.

[57] $P' = z * (z_{cycle})^{-1}$ un parciālkaršu (P',Q) un (z,Q) kārtas ir vienādas.
Permutāciju rēķini un parciālkartes [10, 11 nodaļas].

Lai permutācijas darbojas uz $C=C_1 \cup C_2$ un permutācija p definēta ar divām permutācijām p_i $(i=1,2)$, kas attiecīgi darbojas uz C_i:

$$p=(C_1: p_1, C_2: p_2),$$

un lai papildus dota bijekcija $u: C_1 \longrightarrow C_2$.

Veikti permutāciju rēķini pie šādiem kopas C dalījumiem [izvēloties dažādas bijekcijas u]:

1) parciālkarte darbojas uz C un tās attēls uz $C=C \cup C'$, kur C' jaunievesto elementu kopa;

2) grafiskajā kartē P, Q darbojas uz $C = C_{green} \cup C_{red}$, kur elementi nokrāsoti divās krāsās no fiksēta ciklu pārklājuma;

3) abus iepriekšējos kombinējot.

Iegūtie rezultāti:

Parciālkartes (P, Q) attēla A = (**P**, **Q**) kombinatoriskais mezgls

$m_A = Q^{-1}uPQ^{-1}$;

$a_A = Q_t^2$, kur Q_t ir Q un Q^u savijums.

[60] Grafiskā karte (Pp_1,Pp_2) ir parciālkartes ($z_1z_2^p$, z_1) attēls, kur par bijekciju u ir lietota $z_1pz_1^{-1}$.

Secinājums:

Grafiskās kartes kombinatoriskais mezgls $m_{(P,\,Q)} = z_2\,pz_1^{-1}$

un mezglojums $a_{(P,\,Q)} = z_1z_1^p$.

Apzīmējot $f = z_2 z^{-1}$, spēkā ir sakarības

$$p = b^{z_1} = d^{z_2}\ ;\ b = d^m = d^f\ ;\ \ m = f^b = d^f.$$

Grafu topoloģiski aprēķini.

Kombinatoriskās kartes, izteiktas ar permutācijām, ir ērti rēķināmi lielumi. Grafi uz virsmām un to invarianti ir aprēķināmi permutāciju tehnikā, arī pierastie topoloģiskie grafu teorētiskie algoritmi ir konstruējami permutāciju rēķinu vidē.

Lai sistematizētu veicamos rēķinus permutāciju rēķinu vidē, šķiro trīs veida operācijas:

1. veida operācija - izteicama ar permutācijām un vienkāršākajām operācijām ar tām, piem. permutāciju reizināšanu un permutācijas ierobežojumu uz fiksētas apakškopas;

2. veida operācija - zigzag- caurskate, permutācijas orbītu caurskate un daži citi līdzīgi vienkārši algoritmi;

3. veida operācija - visas pārējās.

Izveidota vide permutāciju rēķiniem *CombMap* ar realizāciju valodā PASCAL.

CombMap realizētas daudzas permutāciju operācijas, kurām atbilst grafu topoloģiskas operācijas. Visas teorētiskās sakarības šajā darbā ir pārbaudītas uz reāliem piemēriem, karšu sērijām.

Kartes *CombMap* ievadāmas manuāli un ir iespējams ģenerēt randomi, ģenerējot patvaļīgas permutācijas un permutācijas ar fiksētu orbītas garumu.

Ar *CombMa* ir iespējams ātri pārbaudīt hipotēzes. Daži no rezultātiem šajā darbā ir izvirzīti vispirms kā hipotēzes, pārbaudīti uz karšu piemēriem un tad pierādīti teorētiski.
CombMap maksimāli iespējamie karšu izmēri - 400 līdz 700 elementi, t.i. 200 līdz 350 šķautnes.

CombMap mērķi:

1) meklēt pēc iespējas vairāk 1.veida operācijas un tādas 2.veida operācijas, kuras eventuāli būtu iespējams pārvērst 1.veida operācijās.

Ja izdotos atrast tik lielu 1.veida operāciju kopu, ka varētu ar to izteikt kādus jau zināmus topoloģiskos grafu teorētiskos algoritmus, tas dotu radikālu pavērsienu grafu topoloģisku algoritmu būvēšanā.

2) pilnveidot *CombMap* kā vidi teorētiskiem pētījumiem un grafu topoloģijas kā kombinatorikas disciplīnas apmācībai.