Latvijas Universitāte
Habilitācijas un promocijas padome matemātikā

Dainis Zeps

PROMOCIJAS DARBA
' Kombinatorisko karšu teorija un tās lietojums grafu topoloģiskos aprēķinos'

KOPSAVILKUMS

Rīga, 1997

Rīga, 1997

Promocijas darbs ir izstādāts Latvijas Universitātes Matemātikas un Informātikas institūtā laika posmā no 1987. gada līdz 1997. gadam.
Darba raksturs: disertācija matemātikas nozarē diskrētās matemātikas apakšnozarē.
Darba vadītājs: Paulis Ķikusts, Dr.mat.
Darba recenzenti:
Rūsiņš Freivalds, Dr. hab. dat.
Indulis Strazdiņš, Dr. hab. mat.
Jan Kratochvil, Dr. mat., Prāgas Universitāte
Darba aizstāvēšana notiks Latvijas Universitātes habilitācijas un promocijas padomes atklātā sēdē

19——.g.'——————' pulksten ————-

____

(adrese)
Ar darbu un tā kopsavilkumu var iepazīties Latvijas Universitātes bibliotēkā
Kalpaka bulvārī 4.

Padomes priekšsēdētājs:——————————————
———

/Andris Buiķis/

Vispārēja informācija

Šis darbs izstrādāts pamatojoties uz pēdējo gadu pētījumiem par grafu rotāciju shēmām, bet reizē tas ir kā kopsavilkums ilgākam darbam, kas iesākās Emanuēla Grinberga vadībā jau 1978. gadā. Risinot grafu teorētiskos uzdevumus Emanuēla Grinberga vadībā un meklējot tiem pielietojumus praksē, mēs nonācām pie idejām un metodēm, kas ir liktas pamatā efektīvu grafu teorētisko algoritmu konstruēšanā.

Pirmie šādi algoritmiskie risinājumi bija saistīti ar grafu trīssakarību un planaritāti, kas pēc savas dabas attiecas uz grafu topoloģiju. Šī topoloģiskā ievirze grafu topoloģiskajos pētījumos ir saglabājusies visus pētniecības gadus, un tāpēc loģiska ir pētījumu nonākšana arī šī darba centrālajā jomā - grafu rotāciju shēmās.

Iepriekšējo gadu pētījumi grafu teorētiskajos jautājumos un grafu teorētisko algoritmu konstruēšanā ir vienmēr gājuši roku rokā, kas atspoguļogās arī pētījumu rezultātos, t.i. tajā ieguldījumā, ko esam devuši šajā jomā. Tā praktiskais uzdevums par neplanāra grafa realizāciju plaknē, realizējot šķautņu krustošanos, deva ievirzi pētījumiem par grafa dinamisko dalīšanu trīssakarības komponentēs. Šā pētījuma rezultāti ir darbā [7]. Diemžēl šis darbs netika publicēts tālāk par Republikas algoritmu fondu. Sākot no 1990 gada parādījās vesela virkne darbu [piemēram [36, 37, 38]], kas risināja šo jautājumu, kur pretī mēs šā jautājuma atrisinājumu jau bijām lokali publicējuši 1984. gadā.

Grūtības šīs problēmas risināšanā deva impulsu teorētiskiem pētījumiem par grafu trīssakarību dinamiskā skatījumā, kur grafs tiek uzlūkots kā šķautņu virkne. Tatta klasiskā grafu trīssakarības teorija dinamiskajā gadījumā izrādās nederīga. Alternatīva teorija, kas virzīta uz dinamisku grafa dalījuma trīssakarības komponentēs aplūkošanu, tika izveidota un rezultāti ir atpoguļoti darbā [9].

Šajā teorijā grafs tika uzlūkots sākotnēji kā tukšs un tam ik solī tiek pievienota viena jauna šķautne, ik reizi grafu uzlūkojot kā jau sadalītu trīssakarības komponentēs. Atšķirībā no Tatta teorijas, kur grafs tiek uzlūkots galvenokārt kā šķautņu kopa, tā arī trīs trīssakarības komponenšu tipi, attiecīgi trīssakarīgie grafi, poligoni un saišķi ar pievienotajām virtuālajām šķautnēm - kā šķautņu apakškopas, mūsu dinamiskājā teorijā grafs sastāv no bāzēm, kas ir virsotņu apakškopas jau sadalītam grafam trīssakarības komponentēs, kur bāzes tips atbilst trīskomponentes tipam Tatta teorijā.

Vienlaicīgi ar jauno teoretisko priekšstatu veidošanos tika izveidota programma, kas uzturēja dinamiski grafu sadalītu trīssakarības komponentēs, kur grafam varēja pievienot jaunas šķautnes. Programma izrādījās ļoti komplicēta, kas veicināja pārskatīt daudzus priekšstatus, kas bija nostiprinājušies iepriekšējā darbā. Tas arī veicināja alternatīvās teorijas veidošanu.

Veidojot programmu, tika pieņemts lēmums bez grafa trīssakarības komponenēm uzturēt arī komponenšu duālos grafus. Pacēlās jautājums, ko uzskatīt par duālo grafu neplanāram grafam. Šis jautājums tika atrisināts pozitīvi, atklājot vienkāršāko grafu rotācijas shēmu. Vēlāk izrādījās, ka šī rotāciju shēma ir ļoti pazīstams fakts, kas daudzkārt ir neatkarīgi daudzu matemātiķu atklāts.

Kā pirmais tiek uzskatīts 19. gadsimta vācu matemātiķis Hefters, kas šo shēmu jau pazina savā laikā[19]. Plašāk par šīs shēmas atklājēju un principiālās idejas autoru, ka , fiksējot grafa šķautņu rotāciju, tiek fiksēts grafa novietojums uz kombinatoriskas virsmas, tiek uzskatīts Edmonds. Sākot no šī laika paralēli sākās pētījumi arī grafu rotāciju shēmu jomā. Šodien šī joma saucās kombinatoriskās kartes.

1993. gadā, turpinot pētījumus pie dinamiskās grafu trīssakarības teorijas, mēs nonācām pie domas dualitātes shēmā virsotņu un šķautņu vietā izmantot stūrus starp blakus izvietotām šķautnēm fiksētajā rotācijā. Šādā gadījumā dualitātes shēma pati par sevi kļūst pašduāla, jo stūra duālais objekts ir atkal stūris. Pētot šīs shēmas, mēs nonācām tieši pie kombinatoriskajām kartēm. Strādājot 1994. pavasarī trīs mēnešus Prāgas universitātē profesora Nešetřila grupā, šī teorija tika novesta līdz zināmam briedumam, un šie rezultāti ir atspoguļoti darbā [11].

Šodien kombinatorisko karšu teorija strauji attīstās, par ko liecina lielais darbu daudzums šajā joma un tas, ka ir parādījusies pirmā monogrāfija par šo tēmu, proti, Jaunzēlandē strādājošo matemātiķu Bonningtona un Littla grāmata 'Foundations of topological graph theory' [14].

Šīs disertācijas pamattēma ir kombinatorisko karšu teorija, un galvenie rezultāti ir izklāstīti trīs publicētos darbos [11, 12, 13].

Grafi paši par sevi ir vienkārši kombinatoriski objekti, bet grafa izvietojums uz kombinatoriskas virsmas, kā izrādās, ir vēl vienkāršāks kombinatorisks objekts. Kombinatoriskās kartes kā kombinatoriski objekti var tikt ievesti dažādi, kā piemēram,

1) permutāciju pāri ar nosacījumu, ka to reizinājumi ir involūcijas bez fiksētiem elementiem [grafi uz orientējamām virsmām];

2) permutāciju pāri bez papildu nosacījumiem [multigrafi uz orientējamām virsmām];

3) 3-grafi [14] [multigrafi uz neorietnējamām virsmām];

4) involūciju bez fiksētiem elementiem trijnieki [multigrafi uz neorietnējamām virsmām];

5) Tatta definētās kombinatoriskās kartes [31][grafi uz neorietnējamām virsmām].

Mūsu pētījums ir skāris visas šīs reprezentācijas, bet šis darbs galveno uzmanību pievērš pirmajām divām pieejām. Mūsu pieejā ir divas atšķirīgas pieejas šo objektu interpretācijā. Pirmkārt, mēs par elementiem, uz kuriem permutācijas darbojas, ņemam ģeometriskus objektus, proti, stūrus. Otrkārt, mēs multigrafu vietā aplūkojam parciālgrafus, t.i. apakšgrafus.

Šā darba pētījums par kombinatoriskajām kartēm aptver pašas kartes, to īpašības, sadaloties tām dažādās klasēs pēc karšu kombinatoriskā mezgla, kā arī to izomorfismu. Pētot parciālkartes, ir ievests to attēla jēdziens. Attēls ir ērti izrēķināms ar permutāciju rēķiniem, un šī rēķināšanas tehnika izrādās produktīvi lietojama interesantos speciālgadījumos, kad ir fiksēts kartes elementu krāsojums divās krāsās.

Tālāk ir attīstīta karšu krāsošanas teorija, kas dod interesantus ģeometriskus objektus grafos uz firsmām, stūru ciklus grafu izklājumos, kas savukārt dod grafa šķautņu sadalījumu divu tipu šķautnēs –ciklu šķautnēs un griezumu šķautnēs.

Viena no šī darba principiālajām nostādnēm ir, ka mēs nodibinām viennozīmīgu atbilstību starp permutācijām un grafiem uz virsmām. Normalizējot vienu no kombinatoriskās kartes šķautnes rotācijām, tiek panākts, ka karti determinē tikai viena permutācija, t..i. visu karšu klasē katrai kartei, proti, permutācijai, atbilst viens grafs uz virsmas. Paplašinot šo nostādni, varam teikt, ka katrai permutāciju formulai, kas izrēķina kādu permutāciju, atbilst kāds objekts grafos uz virsmām.

Šī ideja tiek attīstīta, organizējot permutāciju rēķinus uz datora izveidotā vidē. Darba gaitā atklājās, ka daudz svarīgu objektu grafiem uz virsmām var tikt izrēķināti ar permutācijām, pielietojot vienkāršākās operācijas ar permutācijām, proti, permutāciju reizināšanu un permutācijas ierobežošanu uz specificētas apakškopas.

Pievienojot dažus vienkāršus algoritmus, piemēram, pazīstamo kartes caurskati – zigzag-caurskati, kas dod kartes kombinatorisko mezglu, kartes lineāro caurskati, tās ciklu atrašanai, iespējamo aprēķinu apjoms stipri paplašināts. Tomēr ar šīm operācijām vēl nepietiek, lai izveidotu kādu nopietnu grafu topoloģisku algoritmu, piemēram, grafa planarizāciju, vai grafa uzturēšanu trīssakarības komponentēs.

Tomēr tieši šajā virzienā mēs saskatām galveno motivāciju šādas pieejas attīstībai, jo, pētot dziļāk kombinatoriskās kartes, ar tām saistītos objektus un to izrēķināmību ar vienkāršām operācijām, ļauj cerēt, ka vienkāršo operāciju apjoms augs, un mēs neredzam principiālus šķēršļus, ka šie vienkāršie rēķini aptvertu arī nozīmīgos algoritmus.

Disertācija ir 61 lapaspusi gara un tā sastāv no 15 nodaļām, tās galvenie rezultāti ir publicēti rakstos [11, 12, 13].

Disertācijas kopsavilkums pa nodaļām

Pirmā nodaļa ir priekšvārds, kas satur vispārīgas norādes par darba raksturu.

Otrā nodaļa ir ievads, kas sastāv no četrām daļām, kas saucas – priekšapsvērumi. Pirmais priekšapsvērums aplūko rotāciju shēmas un mūsu pieeju to aplūkošanā. Sākot ar priekšvēsturi ir izklāstīts galvenā principiālā nostādne šajā darbā par viennozīmīgo atbilstību starp permutāciju klasi un grafu uz virsmām klasi un kā šī nostādne tiks lietota tālāk.

Otrais priekšapsvērums runā par grafu topoloģiju un kā šis darbs to skar. Trešais priekšapsvērums runā par permutāciju rēķinu un algoritmisko vidi uz datora. Tiek definētas trīs tipa operācijas, attiecīgi permutāciju rēķinu operācijas, ļoti vienkārši algoritmiski realizējamas operācijas un citas, kas neiekļaujas iepriekšējās.

Ceturtais priekšapsvērums cenšas principiāli pieskarties jautājumam, ko nozīmē lietot kombinatorisko karšu teoriju grafu topoloģiskos aprēķinos.

Trešā nodaļa aplūko permutācijas vispār un darbā lietotos apzīmējumus.

Ceturtā nodaļa ir īsa norāde, kur atrodamas ziņas par kombinatoriskajām kartēm vispārīgākā izklāstā nekā šajā darbā.

Piektā nodaļa ar tās sešām apakšnodaļām aplūko kombinatoriskās kartes, kas definētas kā permutāciju pāris ar vienu papildus prasību, lai šķautņu rotācija saturētu tikai grafiskas šķautnes. Šajā nodaļā ir aplūkotas dažas vienkāršas karšu īpašības, slēgtās karšu klases ar fiksētu labo šķautņu rotāciju un tiek ievestas normālās kartes ar vienu izvēlētu [un fiksētu visai karšu klasei] labo šķautņu rotāciju.

Piemērs 1. *Kombinatoriskās kartes piemērs:*

$$P = (189)(2536)(47\bar{0})$$

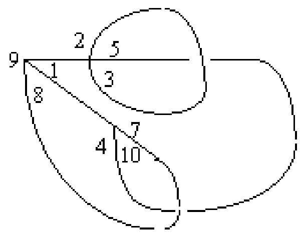
$$Q = (17926)(35480\bar{0})$$

$$\pi = (12)(34)(56)(78)(9\bar{0})$$

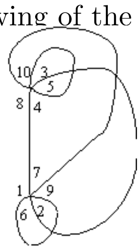
$$\varrho = (14)(23)(5\bar{0})(69)(78)$$

Trešajā apakšnodaļā ir aplūkotas karšu klases ar fiksētu kreiso šķautņu rotāciju. Ir parādīts, ka pašsaistītās kartes veido klasi, kur labā un kreisā šķautņu rotācijas sakrīt, un šī klase[vienīgā no visām] ir apakšgrupa visu karšu grupā, bet pārējās klases ar fiksētu kreiso šķautņu rotāciju ir šīs apakšgrupas kreisās blakusklases.

Ceturtā apakšnodaļa aplūko karšu kombinatorisko mezglu un parāda, ka katrai klasei ar fiksētu kreiso šķautņu rotāciju ir faktiski fiksēts kombinatoriskais mezgls. Tiek pierādīta teorēma, ka katru karti var izteikt ar tās mezgla reizinājumu ar pašsaistītu karti, kas tiek nosaukta par kartes mezglojumu.



Picture 1: The drawing of the map in the example



Picture 2: The drawing of the dual map in the example

Piemērs 2. *K_4 atbilstošā normalizētā kombinatoriskā karte:*

$$P = (19\bar{1})(4\bar{2}8)(236)(57\bar{0})$$

$$Q = (1\bar{0}6)(24\bar{1})(358)(79\bar{2})$$

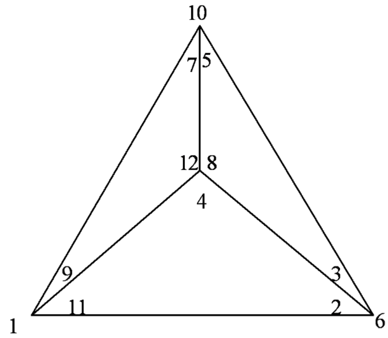
$$\varrho = (17)(28)(3\bar{0})(49)(5\bar{2})(6\bar{1})$$

Šīs kartes mezgls ir:

$$\mu = (1287)(349\bar{0})(56\bar{1}\bar{2})$$

Atbilstošais mezglojums ir:

$$\alpha = (1\bar{0}\bar{1}29\bar{2})(358)(467)$$



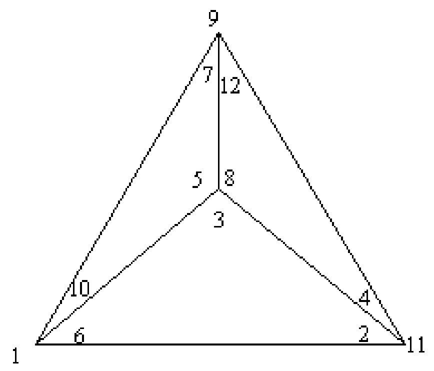
Picture 3: The drawing of the map considered in the example

Nākamās apakšnodaļas aplūko karšu izomorfismu un karšu grafisko izmorfismu.

Sestā nodaļa aplūko parciālās kombinatoriskās kartes, kas izrādās ir ļoti noderīgs jēdziens karšu pētīšanā vispār. Šī nodaļa sastāv no 11 apakšnodaļām. Pirmā apakšnodaļa aplūko parciālkaršu zīmēšanu, kur zīmēšanas procedūra reizē ir pierādījums, ka patvaļīgam permutāciju pārim atbilst grafiska parciālkarte, tas ir, kādas kartes apakškarte. Šo nostādni formalizē, ievedot kombinatorisku objektu – parciālkartes attēlu, kas pats ir kombinatoriskā karte.

Piemērs 3. *Parciālkarte*

$$\left\{ \begin{array}{l} (12)(34)(56) \\ \underline{(135)(246)} \\ (145236) \end{array} \right.$$



Picture 4: The drawing of the dual map considered in the example

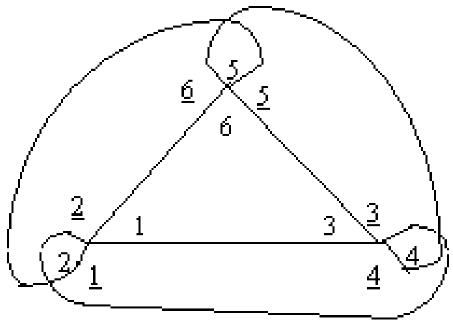
Šīs parciālkartes attēls:

$$\left\{\begin{array}{l} (1\bar{1}2\bar{2})(3\bar{3}4\bar{4})(5\bar{5}) \\ (135)(246)(\bar{6}\bar{3}\bar{2}\bar{5}\bar{4}\bar{1}) \\ \hline (1\bar{4})(2\bar{3})(3\bar{6})(4\bar{5})(5\bar{2})(6\bar{1}) \end{array}\right.$$

Trešajā nodaļā tiek aplūkota parciākartes negrafisko šķautņu ģeometriskā interpretācija, kas ļauj uzlūkot parciālkarti kā tādu apakškarti kādai kartei, kur pēdējo iegūst, aizlīmējot negrafiskās šķautnes ar poligoniem. Šo karti sauc par apakškartes reducēto [vai saīsināto] attēlu.

Apakšnodaļas no 6 līdz 11 aizskar dažus šaurākus jautājumus.

Septītā nodaļa satur tikai īsu norādi uz literatūru, kur var



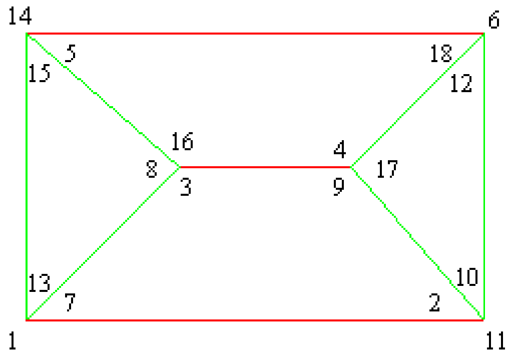
Picture 5: The drawing of the image of the partial map

atrast skatītas kartes, kam atbilst grafi uz neorientējamām virsmām.

Astotā nodaļa satur ciklu pārklājumu teoriju. Par ciklu pārklājumu tiek saukta permutācija, kur katra pāreja seko vai nu virsotņu vai skaldņu rotācijai. Orbītas ciklu pārklājumā ģeometriskā interpretācijā ir grafa cikli, pie kam jebjuram ciklam grafā var atrast tādu ciklu pārklājumu, kas saturētu atbilstošo orbītu.

Ciklu pārklājums gan vienlaicīgi satur tikai dažus grafa ciklus, bet turpretī šis objekts ir ļoti vienkāršs un to pētīšana visas grafa ciklu kopas pētīšanas vietā dod rezultātus, kas tieši lietojami grafu topoloģiskos pētījumos. Tāpēc šo objektu pētīšanai šajā darbā ir ierādīta ļoti liela vieta un nozīme. Salīdzinājumā literatūrā labi pazīstamie Stahla cikli bija derīgi, lai pierādītu Žordāna līknes teorēmu kombinatoriskā variantā [28], bet tie pārlieku grūti definējami un to lietojums citur apšaubāms.

Ciklu pārklājums sadala kartes šķautnes četrās grupās, attiecīgi cikla, šķēluma, krosa un rekurences šķautnēs.



Picture 6: The drawing of the prism graph with marked cycle-edges.

Piemērs 4. *Normalizēta planāra kombinatoriskā karte, kas atbilst prizmas grafam:*

$$P = (1\bar{3}7)(2\bar{0}\bar{1})(38\bar{6})(4\bar{7}9)(5\bar{5}\bar{4})(6\bar{2}\bar{8})$$

$$Q = (1\bar{4}6\bar{1})(2937)(4\bar{8}5\bar{6})(8\bar{5}\bar{3})(\bar{0}\bar{2}\bar{7}).$$

Ciklu pārklājums bez iekšējām šķautnēm [šajā gadījumā vienīgais tāds iespējamais]:

$$(1\bar{4}5\bar{6}37)(294\bar{8}6\bar{1})(8\bar{5}\bar{3})(\bar{0}\bar{2}\bar{7}).$$

Ņemot tikai cikliskās šķautnes, t.i. cikla un rekurences šķautnes, un ierobežojot uz tām cikla pārklājumu, mēs iegūstam t.s. cikla pārklājuma apakškarti. Ir pierādīta teorēma, ka cikla pārklājuma apakškarte ir kombinatoriskā karte.

Nozīmīgs apstāklis ir, ka ciklu pārklājumi un to raksturlielumi ir ārkārtīgi vienkārši rēķināmi. Sakrības starp ciklu pārklājumiem un šķautņu rotāciju sadalījumiem par šķautņu tipiem ir aplūkotas astotajā apakšnodaļā. 10. apakšnodaļā ir aplūkotas svarīgas teorēmas, kas aplūko kartē izmaiņas šķautņu tipos, ja tā tiek reizināta ar šķautni no labās šķautņu rotācijas.

9. nodaļā aplūko svarīgu ciklu pārklājumu apakšvariantu, kad ir tikai diva tipa šķautnes kartē, proti – cikla šķautnes un šķēluma šķautnes. Šajā gadījumā kartes elementu kopa ir izkrāsojama divās krāsās tā, ka katra šķautne šķautņu rotācijā saņem abas krāsas. Šos cikla pārklājumus sauc par nokrāsojamiem . Šis gadījums ir svarīgs vēl tāpēc, ka cikla pārklājumi ir izrēķināmi ar kartes apiešanas algoritmu, ko sauc par zigzag-caursakti. Kā zināms, zigzag-caurskate fiksē arī kartē kombinatorisko mezglu.

9. nodaļas 2. apakšnodaļā ir aplūkoti daži rezultāti nokrāsojamu karšu pārklājumu pielietošanai grafu topoloģijas uzdevumu risināšanā. Nodaļās 9.2.2 un 9.2.3 ir demonstrēta pieeja, kas ir formulēta ievadā: pierādot teorēmu par permutācijām [teorēma 55], kurai ir tieša grafiska interpretācija, tiek aplūkotas tās konsekvences grafu topoloģiskā skatījumā. Papildus ir rādīta vienkārša kārtula, kā pāršķelt ciklus nokrāsojamā ciklu pārklājumā.

10. nodaļā ir aplūkota permutāciju rēķinu tehnika gadījumam, ja elementu kopa ir sadalīta apakškopās.

11. nodalā šī tehnika tiek lietota, lai rēķinātu parciālkartes attēlu un tā raksturlielumus. Tiek izrēķināti kartes mezgs un mezglojums. Tālāk šī tehnika tiek lietota, lai aprēķinātu nokrāsojama ciklu pārklājuma definētās abu krāsu parciālkartes un citus raksturlielumus.

12. nodaļa aplūko dažas grafu topoloģiskas operācijas, kā tās realizējamas ar pastarpinātajiem parciālkaršu aprēķiniem. Tiek pētīts šo operāciju tips pēc šo operāciju sarežģītības, klasificējot tās trīs tipa operācijās, kā tas jau minēts iesākumā.

13. nodaļā ir aplūkota valodā PASCAL realizētā vide kombinatorisko karšu un dažāmu raksturlielumu rēķināšanai. Šajā vidē tiek izmēģināti dažādi algoritmi. Šī vide tiek izmantota hipotēžu pārbaudei, pārbaudot gan kādus teorētiskus pieņēmumus, gan arī algoritmiskus risinājumus. Kartes un atbilstošie grafi tiek ievadīti gan manuāli gan ģenerēti randomi. Garfu lielums ir līdz vairākiem simtiem šķautņu. 54. lapaspusē ir dots eksperimenta protokola piemērs.

14. nodaļā ir aplūkota priekšvēsture šim pētījumam, kas atspoguļots šajā distertācijā. Par to jau gāja runa šī kopsavilkuma ievadā.

15. nodaļā ir darba kopsavilkums, kur arī ir skarta šī jautājuma priekšvēsture un runāts par iepriekšējo gadu darba rezultātiem un ieguldījumu grafu algoritmu konstruēšanas jomā.

16. nodaļa satur pateicības.

Darba noslēgumā ir literatūras un citas dabas [referāti konferencēs, nepublicēti manaskripti] norādes, kopskaitā 62, kas iedalītas trīs grupās. Pirmā grupa [skaitā 26]satur norādes uz citu autoru darbiem, kam ir sakars ar kombinatorisko karšu teoriju. Otrā grupa [skaitā 6], kas satur nozīmīgus darbus, kam sakars ar iepriekšējo gadu darbību grafu algoritmu konstruēšanas jomā. Trešā grupa [skaitā 30] satur gan autora darbus [arī svarīgākos referātus konferencēs, nepublicētos manaskriptus] iepriekšējos gados, gan pēdējo gadu darbus, kam tiešs sakars ar šīs disertācijas tēmu.

Authora publikācijas par disertācijas jomu

References

[1] P. Ķikusts, D. Zeps. *Partitioning of the Two-Connected Graph into Three-Connected Components*, The Description of the Algorithm, submitted in Fund of programs in Moscow, 1978.

[2] P.Ķikusts, D. Zeps. *Graphs on surfaces*, Conf. LMS, Riga, 1994.

[3] D. A. Zeps. *Exhaustive search algorithm to find Hamiltonian Cycle in Graphs*, EIK, 16, 1-3, Berlin, Akademie-Verlag, 1982, 69 - 75.

[4] D. A. Zeps, *On the results of testing the algorithm to find the planar part of graph in random graphs*, Kaunas, N13, 1981.

[5] D. A. Zeps. *Testing of the algorithm to find a planar part in the graph*, Vilnius, 1982, 5pp.

[6] D. A. Zeps. *Packet of Programs of graph-theoretical algorithms: planarity and implementation of the graph*, Novosibirsk, 1982, 4pp.

[7] D. A. Zeps. *On the Dynamic Partitioning of the Graph in Threeconnected Components*, Republican Fund of Algorithms and Programs, Inv. N. UA0003Riga, 1984, 16pp.

[8] D. A. Zeps. *Manual of Graph Theoretical Monitor: Connectivity(GTMC1)*, Republican Fund of Algorithms and Programs, Inv.N. UM0071, Riga, 1985, 17pp.

[9] D. A.Zeps. *Another Theory of Triconnectivity. Prague*, KAM MFF UK, N 90-168, Prague, 1992., 6pp.

[10] D. Zeps. *Graphs with rotation in permutation technique*, KAM Series, N 94-274, 1994, Prague, Charles University, 8pp.

[11] D. Zeps. *Graphs as rotations*, KAM Series, 96-327, Prague,1996, 9pp.

[12] D. Zeps. *Graphs with rotations:partial maps*, KAM Series, 97-365, 1996, 12pp.

[13] D. Zeps. *The use of the combinatorial map theory in graph-topological computations* , KAM Series, 97-364, Prague, 1997, 8pp.

Citu autoru publikācijas par šo tēmu

[14] P. Bonnington, C.H.C. Little, *Fundamentals of topological graph theory*, Springer-Verlag, N.Y.,1995.

[15] G. Burde, H. Zieschang. *Knots*, Walter de Gruiter, Berlin N.Y., 1985.

[16] J. K. Edmonds. *A combinatorial representation for polyhedral surfaces*, Notices Amer. Math. Soc. (1960), 646.

[17] M. Ferri, C. Gagliardi. *Cristallisation Moves*, Pacific Journ. Math., Vol.100. No 1, 1982.

[18] P. J. Giblin. *Graphs, Surfaces, and Homology.* John Willey & Sons, 1977.

[19] L. Hefter, *ber metacyklische Gruppen und Nachbarconfigurationen*, Math. Ann. 50, 261- 268, 1898.

[20] A. Jacques. *Sur le genre d'une paire de substitutions*, C.R.Acad. Sci.Paris ser:I Math. **367**, 625-627,1968.

[21] S. Lins. *Graph Encoded Maps*, Journ.Comb.Theory, Series B 32, 171-181, 1982.

[22] C.H.C. Little, *Cubic combinatorial maps*, J.Combin.Theory Ser. B 44 (1988), 44-63.

[23] Yanpei A. Liu *Polyhedral Theory on Graphs*, Acta Mathematica Sinica, New Series, 1994, Vol.10,No.2, pp.136-142.

[24] G.Ringel. *Map Color Theorem*, Springer Verlag, 1974.

[25] P. Rosenstiel, R.C. Read. *On the principal edge tripartition of a graph*, Discrete Math. 3,195-226, 1978.

[26] S. Stahl. *The Embedding of a Graph - A Survey.* J.Graph Th., Vol 2 (1978), 275-298.

[27] S. Stahl. *Permutation-partition pairs: A combinatorial generalisation of graph embedding*, Trans Amer. Math. Soc. 1 (259) (1980), 129-145.

[28] S. Stahl. *A combinatorial analog of the Jordan curve theorem*, J.Combin.Theory Ser.B 35 (1983), 28-38.

[29] S. Stahl. *A duality for permutations*, Discrete Math. 71 (1988), 257-271.

[30] S. Stahl. *The Embedding of a Graph — A Survey*, Journ.Graph Theory, Vol.2, 275-298, 1978.

[31] W.T.Tutte. *Combinatorial maps*, in *Graph theory*, chapter X, 1984.

[32] A. Vince. *Combinatorial maps*, J.Combin.Theory Ser.B 34 (1983), 1-21.

[33] T. R. S. Walsh, *Hypermaps Versus Bipartite Maps*, Journ. Comb. Math., Ser B 18, 155-163, 1975.

[34] A. T. White. *Graphs, Groups and Surfaces*, North-Holland, P.C., 1973.

[35] H. Wielandt. *Finite Permutations Groups*, Academic Press, New York, 1964.

[36] Z. Galil, G. F. Italiano. *Fully Dynamic Algorithms for 2-Edge Connectivity*, Technical Report CUCS-016-91, Columbia University, 1991, 29 pp.

[37] Z. Galil, G. F. Italiano. *Maintaining the 3-edge-Connected Components of a Graph On-line*, Technical Report CUCS-017-91, Columbia University, 1991, 24 pp.

[38] A. Kanevsky, G. D. Battista, R. Tamassia, J. Chen. *On-Line Maintenance of the Four-Connected Componenets of a Graph*, extended abstract, IEEE, 1991.

[39] R. Tarjan. *An Efficient Planarity Algorithm. Stanford University*, STAN-CS-244-71, 1971.